Profesor
Diego Pérez U.

PITAGORAS
ACADEMIA

ARITMÉTICA

GRUPO PITÁGORAS

AVANCE II

PROMEDIOS
MAGNITUDES PROPORCIONALES

PROMEDIOS

El promedio , de un conjunto de números ordenados según su magnitud , es un número que tiene a situarse en el centro de dicho conjunto de números .

- Sea “P” el promedio de “n” cantidades ordenados según su magnitud:

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 \ldots < a_n$$

Se cumple :

$$\boxed{a_1 < \mathbf{P} < a_n}$$

Clases de PROMEDIOS

PROMEDIO ARITMÉTICO (P.A)

EL PROMEDIO O MEDIA ARITMÉTICA ES EL RESULTADO DE DIVIDIR LA SUMA DE LAS "n" CANTIDADES ENTRE "n"

$$\boxed{PA = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}}$$

Ejemplo Halle el promedio aritmético de los siguientes números:
21 ; 28 ; 33 ; 46 y 24.

$$PA = \frac{21 + 28 + 33 + 46 + 24}{5} = 30,4$$

PROMEDIO GEOMÉTRICO (P.G)

EL PROMEDIO O MEDIA GEOMÉTICA ES LA RAÍZ ENÉSIMA DEL PRODUTO DE LAS “n” CANTIDADES POSITIVAS.

$$PG = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times a_3 \times \ldots \times a_n}$$

Ejemplo Halle el promedio geométrico de los siguientes números:
$9\ ;\ 9^2\ ;\ 9^3\ ;\ 9^4\ ;\ 9^5$

$$PG = \sqrt[5]{9 \times 9^2 \times 9^3 \times 9^4 \times 9^5} = \sqrt[5]{9^{15}} = 9^3 = 729$$

PITAGORAS ACADEMIA

PROMEDIO ARMÓNICO (P.H)

EL PROMEDIO O MEDIA ARMÓNICA ES EL RESULTADO DE DIVIDIR LA CANTIDAD DE NÚMEROS ENTRE LA SUMA DE LAS INVERSAS DE DICHAS CANTIDADES.

$$\boxed{PH = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}}}$$

Ejemplo Halle el promedio armónico (PH) de los siguientes números: 24 ; 12 ; 18 y 36

$$PH = \frac{4}{\frac{1}{24} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36}} = \frac{4}{\frac{15}{72}} = 19{,}2$$

- En caso que nos mencionen a dos o tres números “A” ; “B” y “C”

	PARA 2 Nros.	PARA 3 Nros.
MEDIA ARITMÉTICA	$MA = \frac{A+B}{2}$	$\overline{MA} = \frac{A+B+C}{2}$
MEDIA GEOMÉTRICA	$MG = \sqrt{AxB}$	$MG = \sqrt[3]{AxBxC}$
MEDIA ARMÓNICA	$MH = \frac{2AB}{A+B}$	$MH = \frac{3ABC}{AB+AC+BC}$

PROPIEDADES

1) DADO :

$$0 < a_1 \leq a_2 \leq a_3 \ldots\ldots \leq a_n$$

$$a_n \geq \overline{MA} \geq \overline{MG} \geq \overline{MH} > 0$$

MAYOR PROMEDIO — **MENOR PROMEDIO**

Cuando se haga mención del ***MAYOR*** promedio se trata del promedio ***ARITMÉTICO*** y cuando se mencione el ***MENOR*** promedio, se trata del promedio ***ARMÓNICO.***

2) Cuando los datos sean iguales , entonces los promedios son iguales , entonces.

$$\boxed{\overline{MA} = \overline{MG} = \overline{MH}}$$

3) Solamente para 2 cantidades “a” y “b”

$$\boxed{MG^2 = MA \times MH}$$

Ejemplo:

Sean los números 12 y 48.
Calcular sus tres promedios.

$$MA = \frac{12+48}{2} = 30 \qquad MG = \sqrt{12 \times 48} = 24 \qquad MH = \frac{2}{\frac{1}{12}+\frac{1}{48}} = \frac{2 \times 12 \times 48}{60} = 19{,}2$$

4)También solo para dos cantidades :

$$\boxed{MA - MG = \frac{(a-b)^2}{4(MA+MG)}}$$

MAGNITUDES PROPORCIONALES

MAGNITUD → Es todo aquello que tiene la característica de variar (aumentar o disminuir) y que se puede medir o cuantificar.

Ejemplos

MAGNITUD	CANTIDAD
TEMPERATURA	22°C
VELOCIDAD	80 KM/H
ÁREA	120 m^2
TIEMPO	45 min

RELACIÓN ENTRE DOS MAGNITUDES

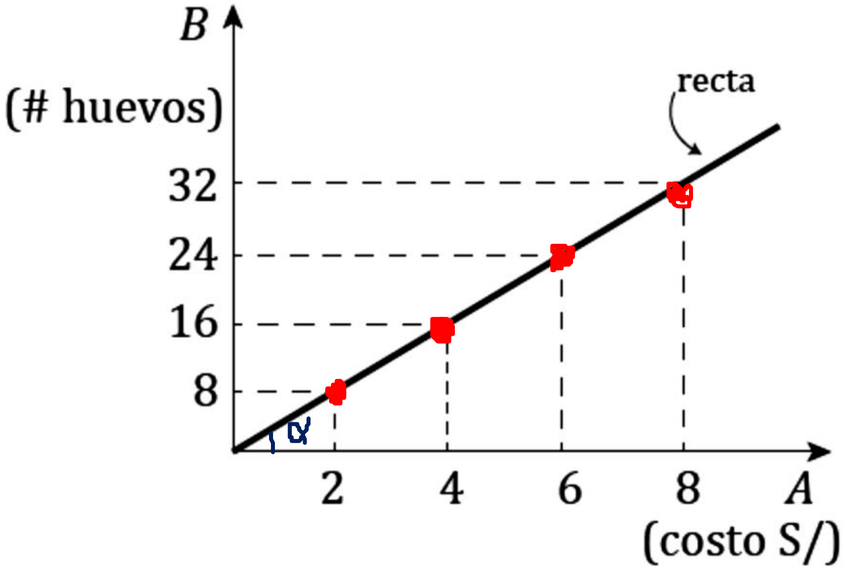
Dos magnitudes son proporcionales cuando al variar una de ellas, entonces la otra también varía en la **misma proporción**. Se pueden relacionar de dos maneras:

Magnitudes Directamente Proporcionales

Dos magnitudes son D.P. si al aumentar o disminuir el valor de una de ellas, el valor de la otra magnitud también aumenta o disminuye en la misma proporción respectivamente; cumpliéndose que el **cociente** de sus valores correspondientes permanece constante.

Ejemplo

COSTO	2	8	4	6
HUEVOS	8	32	16	24



(COSTO) DP (# HUEVOS)

Se cumple que:

$$\frac{2}{8} = \frac{8}{32} = \frac{4}{16} = \frac{6}{24} = Cte$$

En General si A Y B son magnitudes Directamente Proporcionales:

$$\frac{A}{B} = K$$

Se observa que:

I. La gráfica de dos magnitudes D.P son puntos que pertenecen a una recta que pasa por el origen de coordenadas.

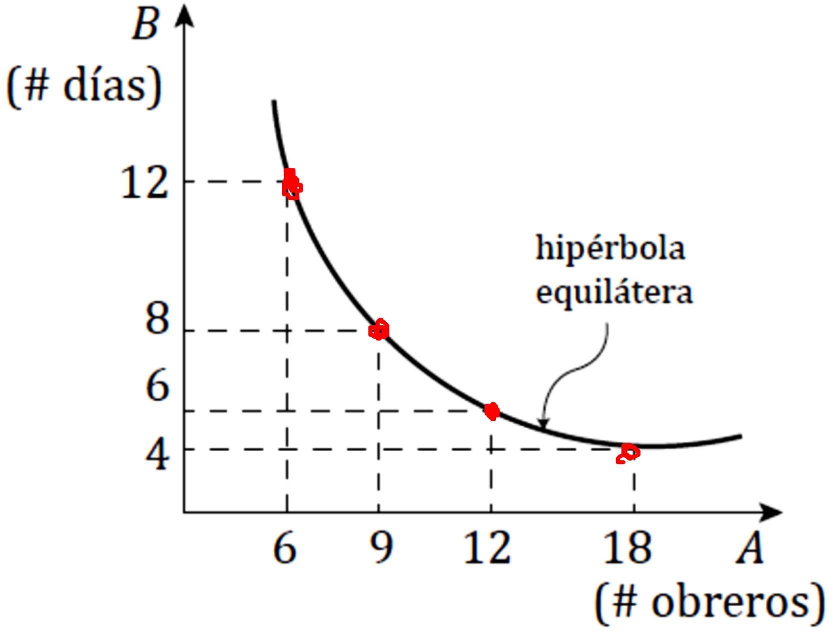
II. En cualquier punto de la gráfica (excepto en el origen de coordenadas) el cociente de cada par ordenado siempre es constante.

Magnitudes Inversamente Proporcionales

Dos magnitudes son I.P. si al aumentar o disminuir el valor de una de ellas, el valor de la otra magnitud también disminuye o aumenta en la misma proporción respectivamente; cumpliéndose que el **producto** de sus valores correspondientes permanece constante.

Ejemplo

OBREROS	12	6	18	9
DÍAS	6	12	4	8



(# OBREROS) IP (# DÍAS)

Se cumple que:

$$12.6 = 6.12 = 18.4 = 9.8 = Cte$$

En General si A Y B son magnitudes Inversamente Proporcionales:

$$A.B = K$$

Se observa que:

I. La gráfica de dos magnitudes I.P son puntos que pertenecen a una rama de una Hipérbola equilátera.

II. En cualquier punto de la gráfica (excepto en el origen de coordenadas) el producto de cada par ordenado siempre es constante.

PROPIEDADES

Sean las magnitudes A; B Y C.

1. $A \text{ DP } B \leftrightarrow B \text{ DP } A$

   $A \text{ IP } B \leftrightarrow B \text{ IP } A$

2. $A \text{ DP } B \leftrightarrow A \text{ IP } \frac{1}{B}$

   $A \text{ IP } B \leftrightarrow A \text{ DP } \frac{1}{B}$

3. Si $n \in \mathbb{Q}$

   $A \text{ DP } B \leftrightarrow A^n \text{ DP } B^n$

   $A \text{ IP } B \leftrightarrow A^n \text{ IP } B^n$

   $A \text{ DP B} \leftrightarrow \sqrt[n]{A} \text{ DP } \sqrt[n]{B}$

   $A \text{ IP B} \leftrightarrow \sqrt[n]{A} \text{ IP } \sqrt[n]{B}$

4. Si

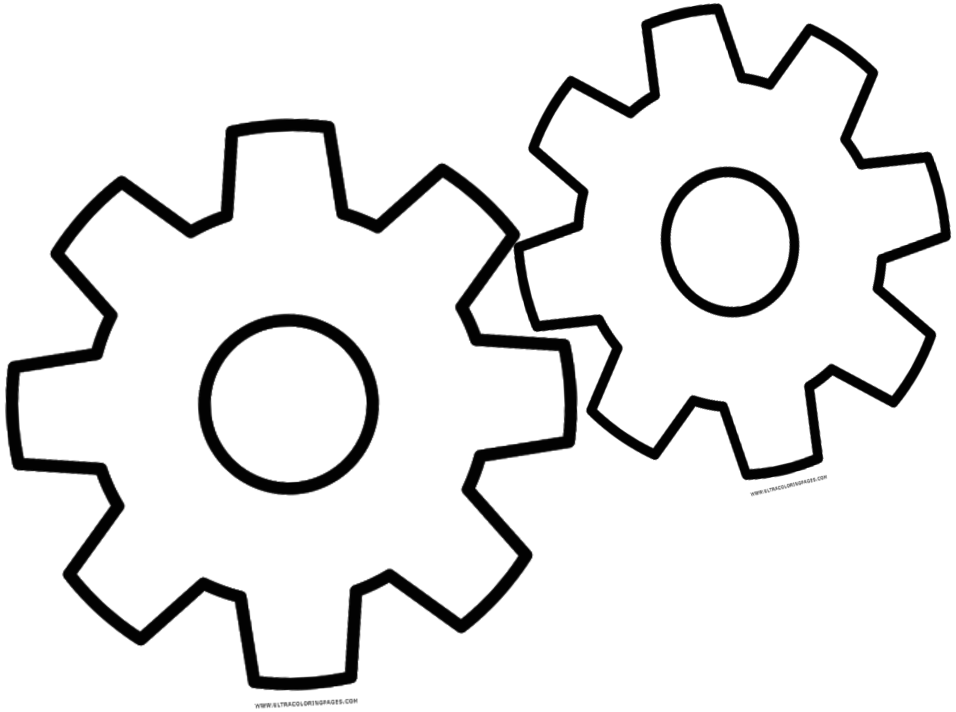
   $A \text{ DP } B$ (cuando C es constante)

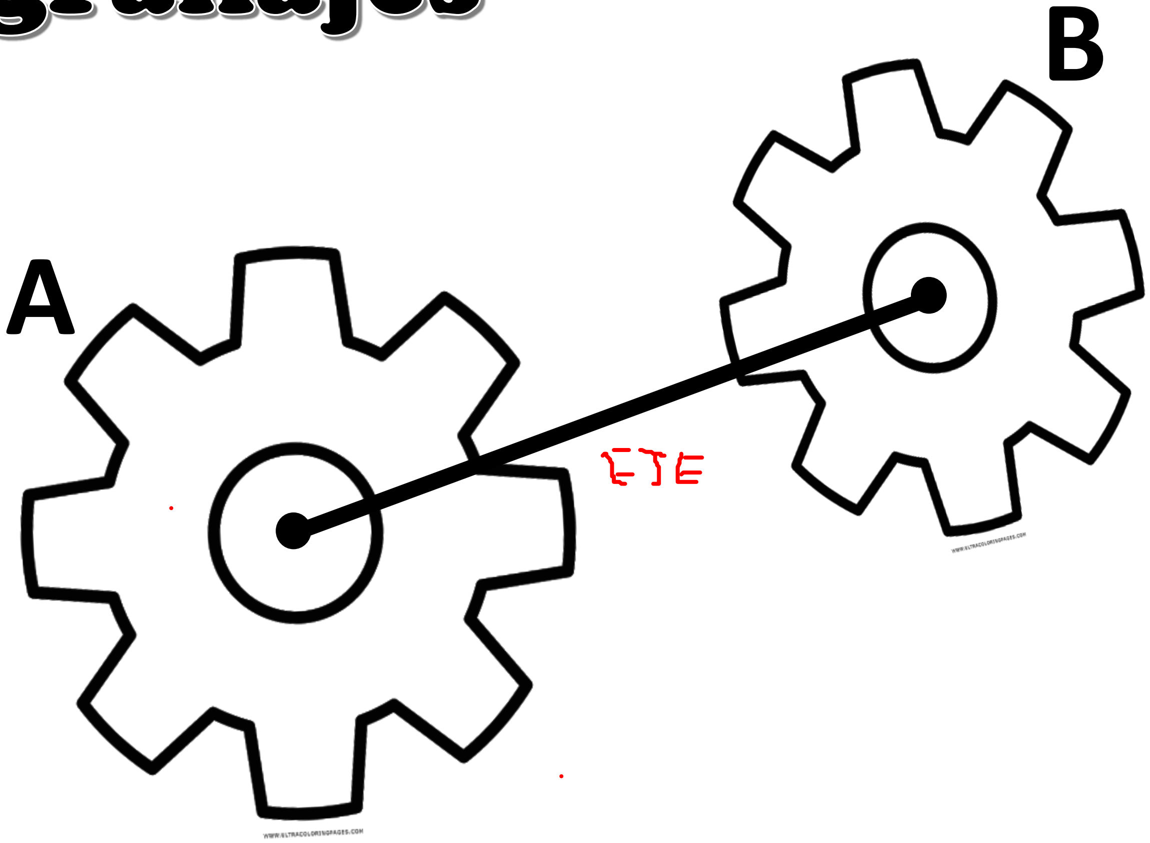
   $A \text{ IP } C$ (cuando B es constante)

   Se cumple

$$\frac{(\text{valor de } A)(\text{valor de } C)}{(\text{valor de } B)}$$

Problemas sobre Engranajes





(# vueltas) IP (# dientes) = CTE

vueltas de A = # vueltas de B

EJERCICIOS

1

A es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de *B*. Cuando *A* es 12, *B* es 16. ¿Cuál será el valor de *B* cuando *A* sea 6?

$A \text{ Ip } \sqrt{B}$ → $\boxed{A \times \sqrt{B} = K}$

$\cancel{12}^{2} \cdot \sqrt{16} = \cancel{6}^{1} \cdot \sqrt{x}$

$8 = \sqrt{x}$

$64 = x$

EJERCICIOS

2

La edad promedio de 5 personas es 20 años y ninguno de ellos es menor de 18 años. ¿Cuál es la máxima edad que puede tener uno de ellos?

* $a_1 ; a_2 ; a_3 ; a_4 ; a_5$

$$P.A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5} = 20$$

- $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 100$

$$\underset{28}{\downarrow} \quad \underset{18}{\downarrow} \quad \underset{18}{\downarrow} \quad \underset{18}{\downarrow} \quad \underset{18}{\downarrow}$$

3

La magnitud *A* es directamente proporcional al cuadrado de *B*, proporcional a *C* e inversamente proporcional a *D*. Cuando *A* es 3, *B* es 6, *C* es 12 y *D* es 8. Determine el valor de *C* cuando *A* sea 16, *B* sea 12 y *D* sea 5.

$A \text{ DP } B^2$

$A \text{ DP } C$

$A \text{ IP } D$

$$\boxed{\frac{A \cdot D}{B^2 \cdot C} = k}$$

$$\frac{\cancel{3} \cdot \cancel{8}}{\cancel{6}^2 \cdot \cancel{12}} = \frac{\overset{2}{\cancel{16}} \cdot 5}{\cancel{12}^2 \cdot x}$$

$$x = 10$$

EJERCICIOS

4

Según la Ley de Boyle, la presión es inversamente proporcional al volumen que contiene determinada cantidad de gas. ¿A qué presión (en atmósferas) está sometido un gas, si al aumentar esta presión en 2 atmósferas, el volumen varía en 2/5 de su valor?

$- \quad +$

$+ \quad -$

$+ \quad P \; \text{IP} \; V \longrightarrow \boxed{P \times V = K}$

$P \times \cancel{V} = (P+2) \times \frac{3}{5} \cancel{V}$

$-\frac{2}{5}$

$5P = 3P + 6$

$P = 3 \text{ atm}.$

EJERCICIOS

5

(UNI 2014 - I)

Las notas obtenidas por tres postulantes hacen un promedio de 15. La relación entre las notas del primero y el segundo es 4/5 y la relación entre el segundo y tercero es 5/6. Calcule la diferencia entre la mayor y menor nota.

$PA \rightarrow \frac{a+b+c}{3} = 15$

$\frac{a}{b} = \frac{4k}{5k}$ $\qquad \frac{b}{c} = \frac{5k}{6k}$

$a+b+c = 15k = 45$

$k = 3$

$\therefore c - a = 2k = 6$

EJERCICIOS

6

En una empresa la eficiencia de un trabajador es directamente proporcional a sus años de experiencia e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de su edad. Carlos, de 25 años de edad, tiene 1 año de experiencia y 2 puntos de eficiencia. ¿Cuál será la eficiencia de Carlos a los 36 años?

$$\boxed{\frac{E \cdot \sqrt{e}}{A} = K}$$

$$\frac{2 \cdot \sqrt{25}}{1} = \frac{X \cdot \sqrt{36}}{12}$$

$$20 = X$$

EJERCICIOS

7

(UNI 2008 - II)

La media aritmética y la media geométrica de 2 números enteros positivos se diferencian en 6 unidades y la suma de las raíces cuadradas de estos números enteros es $6\sqrt{3}$. Halle la media armónica de dichos números.

$$MH = \frac{2ab}{a+b} = 19{,}2$$

$$* \quad \frac{a+b}{2} - \sqrt{a.b} = 6 \quad \times 2$$

$$\underbrace{a+b-2\sqrt{a.b}} = 12$$

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = 12$$

$$\bullet \quad \sqrt{a}-\sqrt{b} = 2\sqrt{3}$$

$$\bullet \quad \sqrt{a}+\sqrt{b} = 6\sqrt{3}$$

$$a = 48 \; ; \; b = 12$$

EJERCICIOS

8

Para dos cantidades a y b, se cumple que el producto de su $\overline{MA}$ y $\overline{MH}$ es 100 y el producto de su $\overline{MA}$ y $\overline{MG}$ es 125. Determinar $a-b$ $(a>b)$

$$\boxed{(a-b)^2 = 4(MA^2 - MG^2)}$$

$$\boxed{MG^2 = MA \times MH}$$

* $MA \times MH = 100 \longrightarrow MG^2 = 100$

$MG = 10$

* $MA \times MG = 125$

$MA = 12{,}5$, $MG = 10$

- $a + b = 25$; $a = 20$, $b = 5$
- $ab = 100$; $20 \cdot 5$

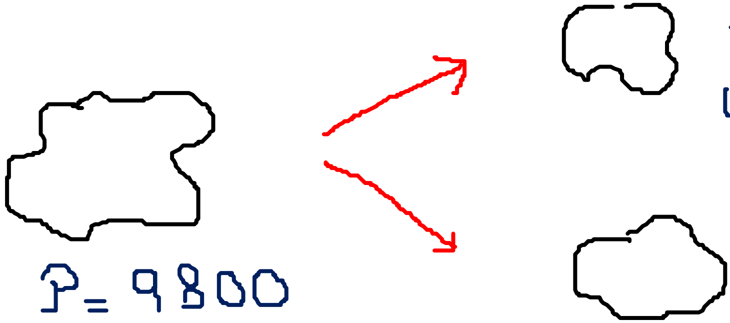
$\therefore a - b = 15$

EJERCICIOS

9

El precio de una joya es proporcional al cuadrado de su peso. Una joya cuyo valor es S/ 9800 se parte en dos pedazos cuyos pesos son entre sí como 4 a 3. ¿Cuánto se recibe por la venta de los dos pedazos?

$$\boxed{\frac{\text{PRECIO}}{\text{PESO}^2} = K}$$



$P = 9800$

$W = 7n$

P_1

$W_1 = 4n$

P_2

$W_2 = 3n$

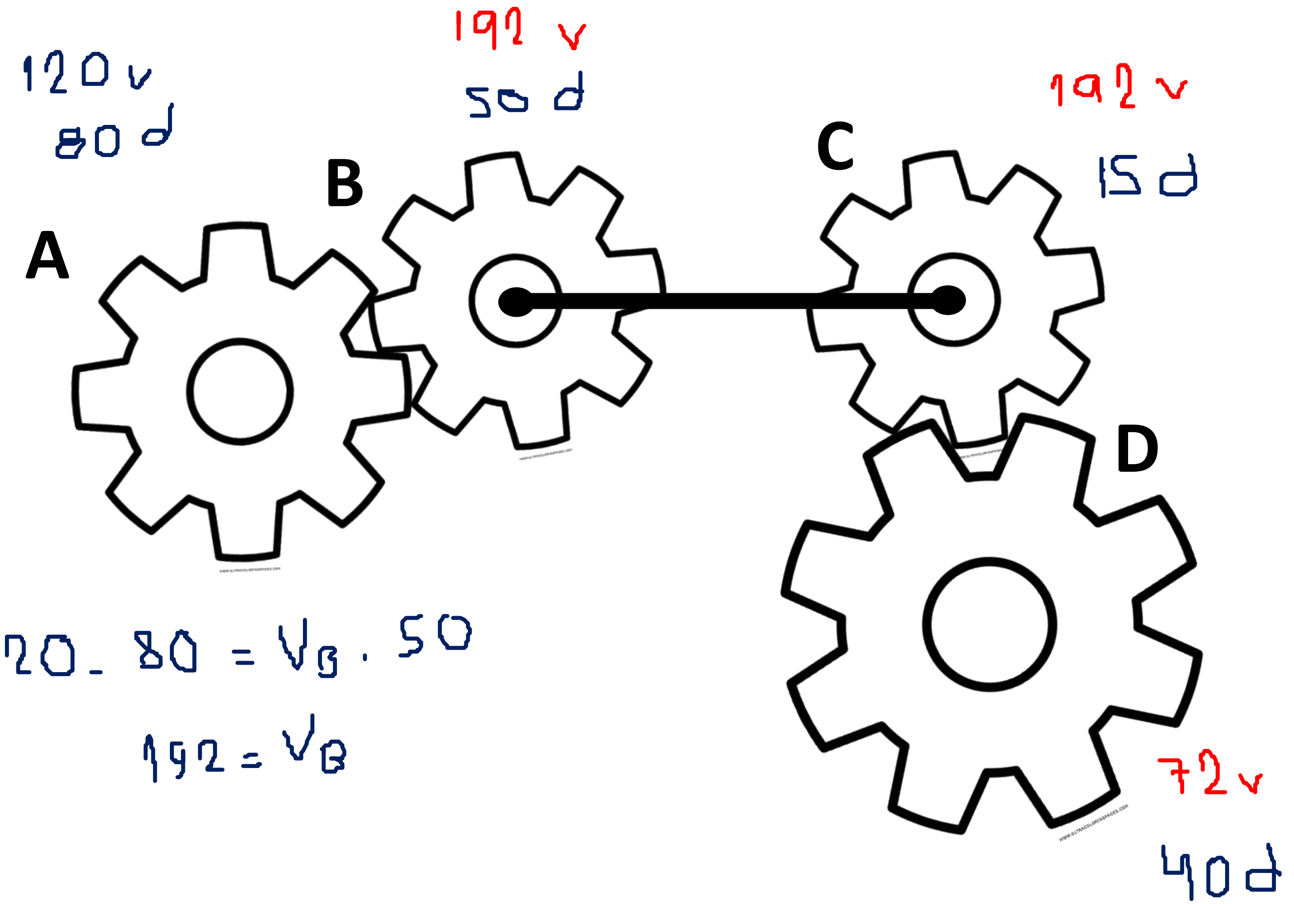
$$\frac{9800}{49n^2} = \frac{P_1}{16n^2} = \frac{P_2}{9n^2} = \frac{P_1 + P_2}{25n^2}$$

$\therefore P_1 + P_2 = 5000$

EJERCICIOS

10

Una rueda A de 80 dientes, se engrana con otra B de 50 dientes; fija al eje de B hay otra rueda C de 15 dientes que engrana con otra cuarta rueda D de 40 dientes. Dando la rueda A 120 revoluciones por minuto, ¿cuánto tiempo tardará la rueda D en dar 18000 vueltas?



$120 \cdot 80 = V_B \cdot 50$

$192 = V_B$

$192 \cdot 15 = V_D \cdot 40$

$72 = V_D$

60 s — 72 v

x s — 18000 v

$\frac{60}{72} = \frac{x}{18000}$

$x = 15000\ s$

4h y 10 min

EJERCICIOS

11

El promedio geométrico de 4 números enteros diferentes es $2\sqrt{2}$ ¿Cuál es el promedio aritmético de estos números?

$$\sqrt[4]{a \cdot b \cdot c \cdot d} = 2\sqrt{2}$$

$$a \cdot b \cdot c \cdot d = 2^6$$

$$1 \quad 2 \quad 2^2 \quad 2^3$$

CLAVE: B

EJERCICIOS

12

A es directamente proporcional a B (cuando C es constante), e inversamente proporcional al cuadrado de C (cuando B es constante). Cuando A es 5, B es 20 y C es 6. Halle el valor de A cuando B sea 28 y C sea 3.

CLAVE: D

EJERCICIOS

13

El promedio de las notas en curso de 30 alumnos fue 52 . Los primeros 6 obtuvieron un promedio de 80 y los últimos 10 sacaron un promedio 31. Calcular el promedio de los restantes alumnos.

CLAVE: D

EJERCICIOS

14

(UNI 2009 - I)

Tres números enteros m, n, p tienen una media aritmética de 10 y una media geométrica de $\sqrt[3]{960}$. Halle, aproximadamente, la media armónica de estos números, si np = 120

$$\frac{a+b+c}{3} = 10 \longrightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ 8}}{a} + b + c = 30$$

$$\sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{960} \longrightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ 8}}{a}bc = 960$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 12}}{b}\,\underset{\substack{\downarrow \\ 10}}{c} = 120 \qquad \underset{\substack{\downarrow \\ 12}}{b} + \underset{\substack{\downarrow \\ 10}}{c} = 22$$

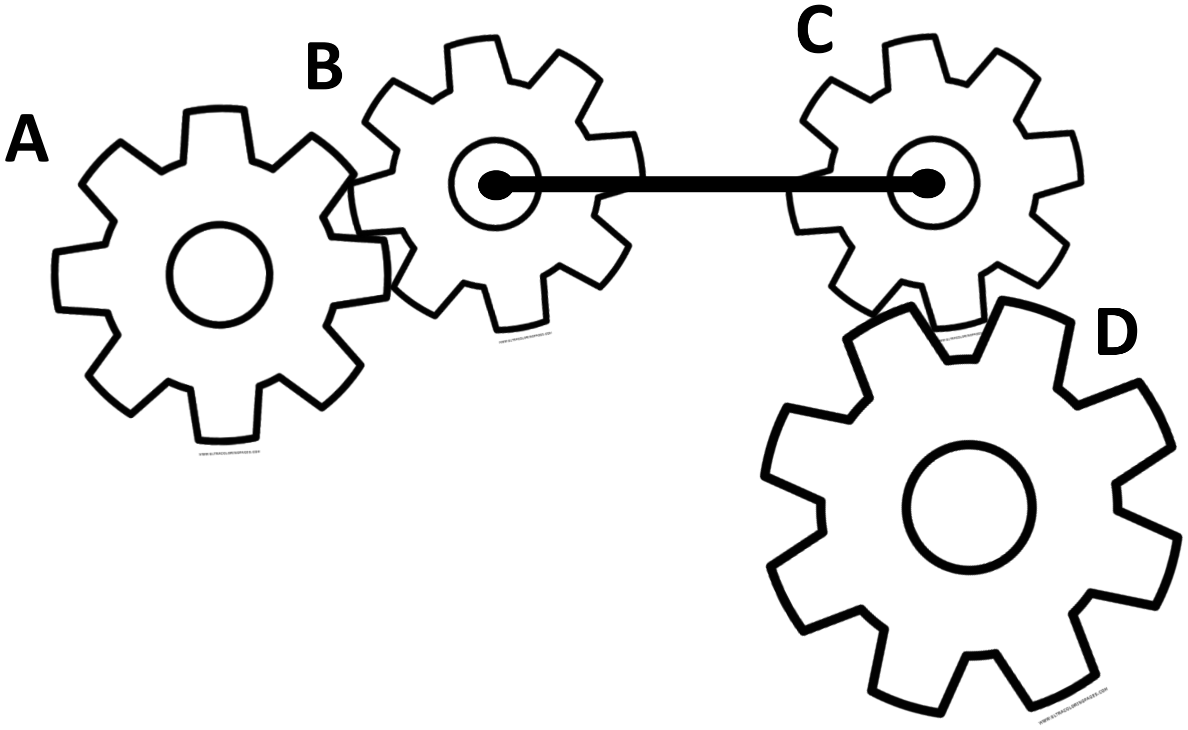
$$MH = \frac{3abc}{ab+bc+ac} = 9{,}73$$

CLAVE: C

EJERCICIOS

15

Las ruedas A, B, C y D tienen 50; 60; 48 y 72 dientes respectivamente. A y B están engranadas, B y C unidas al mismo eje, C y D engranadas. Si A da 45 vueltas, ¿cuántas vueltas da la rueda D?



CLAVE: A

16

Calcular la media armónica de los 30 números de la siguiente serie: 2; 6; 12; 20; ...

CLAVE: A

17

Si : B D.P. $\sqrt{A}$ .... (C es constante)

A I.P. C^2........... (B es constante)

Si cuando : $A=16$; $B=6$; $C=3$. Calcular A cuando $B=10$; $C=5$

CLAVE: D

18

El promedio armónico de *30* números impares es *7/5* y el promedio armónico de otros *20* números es *5/7* . Calcula el promedio armónica de los *50* números .

CLAVE: E

19

El sueldo de un trabajador en un empleo es directamente proporcional al cuadrado de su edad. ¿Dentro de cuántos años un empleado que hoy tiene 17 años tendrá un sueldo que sea 16 veces el sueldo actual?

CLAVE: D

20

Hallar 2 números sabiendo que su mayor promedio y menor promedio son 13,5 y $13\frac{1}{3}$ respecitvamente. Dar como respuesta la diferencia de dichos números.

CLAVE: A

EVALUACIÓN DIARIA

01) El promedio de 50 números es 38, si 48 y 52 son dos de los números. Eliminando estos dos números, el promedio de los restantes es:

A) 38,5 B) 31,4 C) 36,4
D) 35,8 E) 37,5

02) El gasto de una persona es DP a su sueldo, siendo el resto ahorrado. Un empleado cuyo sueldo es de S/.900, ahorra S/.90. ¿Cuál será su sueldo, cuando su gasto sea de S/.1260?

A) S/.1400 B) S/.1134 C) S/.1600
D) S/.1500 E) S/.1300

03) La siguiente tabla presenta las variaciones de las magnitudes A y B.

A	18	27	30	15	b
B	36	81	100	a	64

hallar: $\sqrt{a+b}$.

a) 10 b) 11 c) 7 d) 13 e) 15

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS